2. Решити једначину

$$u_{tt}+2u_t=u_{xx}-u$$
$$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=x(\pi-x),\quad 0\le x\le\pi$$
$$u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0$$

на скупу $\Omega=\{(x,t)\mid 0\le x\le\pi,\ t\ge 0\}$

Решење:

Претпоставимо да је ф-ја $u(x,t)$ облика $u(x,t)=X(x)T(t)$.

Задатак постаје

(*) $X(x)T''(t)+2X(x)T'(t)=X''(x)T(t)-X(x)T(t)$

$$T(0)=0,\ X(x)T'(0)=x(\pi-x),\quad 0\le x\le\pi$$
$$X(0)=0,\ X(\pi)=0$$

Из (*) добијамо

$$\frac{T''(t)+2T'(t)+T(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

односно

$$T''(t)+2T'(t)+(1+\lambda)T(t)=0,\quad X''(x)+\lambda X(x)=0$$

1° $\lambda<0$

Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda=0$$
$$k^2=-\lambda$$
$$k=\pm\sqrt{-\lambda}\Rightarrow X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$
$$X(0)=c_1+c_2=0\Rightarrow c_2=-c_1$$
$$X(\pi)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}\pi}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}=c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi}-e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right)=0\Rightarrow c_1=0$$

Дакле, $X(x)=0$, па је $u(x,t)=0$.

2° $\lambda=0$

Једначина постаје $X''(x)=0\Rightarrow X(x)=ax+b$

$$\left.\begin{aligned}&X(0)=0=b\\&X(\pi)=a\pi=0\Rightarrow a=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow X(x)=0\Rightarrow u(x,t)=0$$

3° $\lambda > 0$

Карактеристични полином је

$$k^2 + \lambda = 0$$

$$k^2 = -\lambda$$

$$k = \pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

$$X(0) = c_1 = 0$$

$$X(\pi) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$$

За $c_2 = 0$, добијамо $X(x) = 0$, односно $u(x,t) = 0$. Нас занима нетривијална решења задатка, па узимамо $c_2 \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_n}\pi = n\pi, \; n \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_n = n^2, \; n \in \mathbb{N}$$

Дакле, $X_n(x) = c_{2n} \sin nx$

Тражимо одговарајуће $T_n(t)$

$$T_n''(t) + 2T_n'(t) + (1+\lambda_n)T_n(t) = 0$$

Карактеристични полином је

$$k^2 + 2k + (1+\lambda_n) = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1+\lambda_n)}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-(1+\lambda_n)} = -1 \pm \sqrt{-\lambda_n} = -1 \pm in \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_n(t) = d_{1n} e^{-t} \cos nt + d_{2n} e^{-t} \sin nt$$

$$T_n(0) = d_{1n} = 0 \Rightarrow T_n(t) = d_{2n} e^{-t} \sin nt$$

Решење задатка $u(x,t)$ је облика

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} d_{2n} \sin nx \, e^{-t} \sin nt$$

Означимо $c_{2n} d_{2n} = e_n$, па је

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \sin nx \, e^{-t} \sin nt$$

Коефицијенте e_n добијамо из услова

$$u_t(x,0) = x(\pi - x), \quad 0 \le x \le \pi$$

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx\left(-e^{-t}\sin nt+te^{-t}\cos nt\right)$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = x(\pi-x), \qquad 0\le x\le \pi$$

Дакле, ф-ју ~~φ(x)~~ $x(\pi-x)$ морамо развити у Фуријеов ред по "синусима" на $[0,\pi]$. Непарно продужење ове ф-је на $[-\pi,\pi]$ је

$$\phi(x)=\begin{cases} x(\pi-x), & 0\le x\le\pi \\ x(\pi+x), & -\pi\le x<0\end{cases}$$

ϕ – непарна $\Rightarrow a_0=a_n=0,\ n\in\mathbb{N}$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\,dx=2\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx=(**)$$

$$\int x\sin nx\,dx=\begin{bmatrix} x=u & \sin nx\,dx=d\vartheta \\ dx=du & -\frac{\cos nx}{n}=\vartheta\end{bmatrix}=-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{1}{n}\int\cos nx\,dx=$$

$$=-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}+c$$

$$\int x^2\sin nx\,dx=\begin{bmatrix} x^2=u & \sin nx\,dx=d\vartheta \\ 2x\,dx=du & -\frac{\cos nx}{n}=\vartheta\end{bmatrix}=-\frac{x^2\cos nx}{n}+\frac{2}{n}\int x\cos nx\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix} x=u & \cos nx\,dx=d\vartheta \\ dx=du & \frac{\sin nx}{n}=\vartheta\end{bmatrix}=-\frac{x^2\cos nx}{n}+\frac{2}{n}\left(\frac{x\sin nx}{n}-\frac{1}{n}\int\sin nx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{x^2\cos nx}{n}+\frac{2x\sin nx}{n^2}+\frac{2\cos nx}{n^3}+c$$

$$(**)=2\left(-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2\cos nx}{n}+\frac{2x\sin nx}{n^2}+\frac{2\cos nx}{n^3}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=2\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n}+0\right)-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^2\cos n\pi}{n}+\frac{2\cos n\pi}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right)=\cancel{\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}}+\cancel{\frac{2\pi}{n}(-1)^n}+$$

$$+\frac{2}{n^3}\left((-1)^n-1\right)=\frac{2}{n^3}\left((-1)^n-1\right)$$

?
Дакле

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3}\left((-1)^n-1\right)\cdot \sin nx$$

па је $\quad c_n=\frac{2}{n^3}\left((-1)^n-1\right).$

На крају,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3}\left((-1)^n-1\right)\sin nx\; e^{-t}\sin nt$$

3. Ријешити ј-ну

$$u_{tt}=u_{xx}-2t$$
$$u(x,0)=\cos\pi x,\ u_t(x,0)=x^2+x,\quad 0\le x\le 1$$
$$u_x(0,t)=t\quad,u_x(1,t)=3t\quad,t\ge 0$$
на скупу $\Omega\{(x,t)\mid 0\le x\le 1,\ t\ge 0\}$.

Рјешење:

$f(x,t)=-2t,\ \mu(t)=t,\ \nu(t)=3t,\ \varphi(x)=\cos\pi x,\ \psi(x)=x^2+x$

Уводимо смјену $u(x,t)=\vartheta(x,t)+w(x,t)$

$w(x,t)=(\gamma_1x^2+\gamma_2x+\gamma_3)\mu(t)+(\delta_1x^2+\delta_2x+\delta_3)\nu(t)$

$w(x,t)=(\gamma_1x^2+\gamma_2x+\gamma_3)t+(\delta_1x^2+\delta_2x+\delta_3)\cdot 3t$

$w_x(x,t)=(2\gamma_1x+\gamma_2)t+(2\delta_1x+\delta_2)\cdot 3t$

Након уведене смјене, гранични услови постају

$\vartheta(x,0)=u(x,0)-w(x,0),\ \vartheta_t(x,0)=u_t(x,0)-w_t(x,0),\ 0\le x\le 1$

$\vartheta_x(0,t)=u_x(0,t)-w_x(0,t),\ \vartheta_x(1,t)=u_x(1,t)-w_x(1,t),\quad t\ge 0$

Бирамо коефицијенте $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\delta_1,\delta_2,\delta_3$ тако да $\vartheta_x(0,t)=\vartheta_x(1,t)=0$

$t-(2\gamma_1 0+\gamma_2)t-(2\delta_1 0+\delta_2)3t=0\Rightarrow t-\gamma_2t-3\delta_2t=0$

$3t-(2\gamma_1 1+\gamma_2)t-(2\delta_1 1+\delta_2)3t=0\Rightarrow 3t-2\gamma_1t-\gamma_2t-6\delta_1t-3\delta_2t=0$

Добијамо

$1-\gamma_2-3\delta_2=0\quad\Rightarrow$ Узмимо $\delta_2=0,\ \gamma_2=1$

$3-2\gamma_1-\gamma_2-6\delta_1-3\delta_2=0\Rightarrow 3-2\gamma_1-1-6\delta_1=0$

γ_3 и δ_3 не утичу на граничне услове, па узмимо $\gamma_3=\delta_3=0$

$2-2\gamma_1-6\delta_1=0\Rightarrow$ Узмимо $\gamma_1=1,\ \delta_1=0$

Дакле, $w(x,t)=(x^2+x)t$. Задатак постаје

$\vartheta_{tt}+w_{tt}=\vartheta_{xx}+w_{xx}-2t$

$\vartheta_{tt}=\vartheta_{xx}+2t-2t$

(*) $\vartheta_{tt}=\vartheta_{xx}$

$\vartheta(x,0)=u(x,0)-w(x,0)=\cos\pi x,\ \vartheta_t(x,0)=u_t(x,0)-w_t(x,0)=x^2+x-(x^2+x)=0,\ 0\le x\le 1$

$\vartheta_x(0,t)=0\quad,\vartheta_x(1,t)=0,\quad t\ge 0$

Даље, претпоставимо да се ф-ја Θ може раставити на $\Theta(x,t)=X(x)T(t)$.
Убацивањем добијамо:

$$X(x)T''(t)=X''(x)T(t)$$

$$X(x)T(0)=\cos\pi x,\ T'(0)=0 \quad ,0\le x\le 1$$

$$X'(0)=0,\ X'(1)=0$$

Одавде је

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda \text{ , односно } T''(t)+\lambda T(t)=0,\ X''(x)+\lambda X(x)=0$$

1° $\lambda<0$

Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda=0$$

$$k^2=-\lambda$$

$$k=\pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$X'(x)=\sqrt{-\lambda}c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}-\sqrt{-\lambda}c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$\left.\begin{aligned}X'(0)&=\sqrt{-\lambda}c_1-\sqrt{-\lambda}c_2=0 \Rightarrow c_2=c_1\\ X'(1)&=c_1\left(\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}}-\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)=0 \Rightarrow c_1=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow X(x)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Theta(x,t)=0$$

2° $\lambda=0$

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}&X''(x)=0 \Rightarrow X(x)=ax+b\\ &X'(0)=a=0,\ X'(1)=a=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow X(x)=b\\ &\text{Сада је }\left.\begin{aligned}&T''(t)=0 \Rightarrow T(t)=ct+d\\ &T'(0)=c=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow T(t)=d\end{aligned}\right\}\Rightarrow \Theta(x,t)=bd=B-\text{const}$$

3° $\lambda>0$

Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda=0$$

$$k^2=-\lambda$$

$$k=\pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

$$X'(x)=-\sqrt{\lambda}c_1\sin\sqrt{\lambda}x+\sqrt{\lambda}c_2\cos\sqrt{\lambda}x$$

$$X'(0)=\sqrt{\lambda}\, c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$
$$X'(1) = -\sqrt{\lambda}\, c_1 \sin\sqrt{\lambda} = 0$$

За $c_1=0$ добијамо $X(x)=0$, па је $\Theta(x,t)=0$. Дакле, добијамо тривијално рјешење. Нас занимају нетривијална рјешења, па бирамо $c_1 \neq 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_n} = n\pi,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow \lambda_n = n^2\pi^2,\ n\in\mathbb{N}$

Дакле, $X_n(x) = c_{1n}\cos n\pi x,\ n\in\mathbb{N}$

Тражимо одговарајуће $T_n(t)$.

$$T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) = 0$$

Као и раније, добијамо $T_n(t) = d_{1n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,t + d_{2n}\sin\sqrt{\lambda_n}\,t$, односно

$$T_n(t) = d_{1n}\cos n\pi t + d_{2n}\sin n\pi t$$
$$T_n'(t) = -n\pi d_{1n}\sin n\pi t + n\pi d_{2n}\cos n\pi t$$
$$T_n'(0) = n\pi d_{2n} = 0 \Rightarrow d_{2n} = 0$$

Дакле, $T_n(t) = d_{1n}\cos n\pi t$

Рјешење $\Theta(x,t)$ тражимо у облику

$$\Theta(x,t) = B + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = B + \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}d_{1n}\cos n\pi x\cos n\pi t$$

Означићемо $c_{1n}d_{1n} = e_n$, па је

$$\Theta(x,t) = B + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \cos n\pi x \cos n\pi t$$

Коефицијенте $B, e_n, n\in\mathbb{N}$ добијамо из услова

$$\Theta(x,0) = \cos\pi x,\quad 0\le x\le 1,$$
$$\Theta(x,0) = B + \sum_{n=1}^{\infty} e_n\cos n\pi x = \cos\pi x$$

Дакле, ф-ју $\cos\pi x$ морамо развити у Фуријеов ред на $[0,1]$, по "косинусима". Прво је морамо парно продужити на $[-1,1]$. Како је ф-ја $\cos\pi x$ парна, то је њено парно продужење на $[-1,1]$ сама та ф-ја.

$\cos \pi x$ – парна $\Rightarrow b_n = 0,\ n\in\mathbb{N}$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \cos \pi x \, dx = \frac{\sin \pi x}{\pi}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \cos \pi x \cos n\pi x \, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(\cos(\pi x - n\pi x) - \cos(\pi x + n\pi x)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(\cos((1-n)\pi x) - \cos((1+n)\pi x)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(1-n)\pi x}{(1-n)\pi} - \frac{\sin(1+n)\pi x}{(1+n)\pi}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0 \text{ , за } n\neq 1$$

$$a_1 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \cos \pi x \cos \pi x \, dx = \int_{-1}^{1} \cos^2 \pi x \, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1+\cos 2\pi x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\right)\Big|_{-1}^{1} = 1$$

Дакле, Фуријеов развој ф-је $\varphi(x) = \cos \pi x$ по косинусима на $[0,1]$ је сама та ф-ја, што је очигледно, јер $\cos \pi x \in \{\cos n\pi x\}$.

Дакле

$$v(x,0) = B + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \cos n\pi x = \cos \pi x \Rightarrow B = 0,\ e_n = 0 \text{ за } n\neq 1,\ e_1 = 1$$

Дакле, $v(x,t) = \cos \pi x \cos \pi t$ је решење проблема $(*)$.

Одавде је $u(x,t) = \cos \pi x \cos \pi t + (x^2 + x)t$

VII вјежбе

Парцијалне диференцијалне једначине

Параболичке једначине

Примјена Фуријевог метода за рјешавање параболичких једначина је аналогна примјени метода за рјешавање хиперболичких једначина.

1. Ријешити једначину *

$$u_t = u_{xx} + \overbrace{t\sin \pi x}^{*}$$

$$u(x,0) = x(1-x), \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0, \quad t \ge 0$$

на скупу $\Omega = \{(x,t) \mid 0 \le x \le 1,\ t \ge 0\}$

Рјешење:

Прво нађимо партикуларно рјешење, како би се ослободили члана (*). Претпоставимо да је партикуларно рјешење облика

$$u_p(x,t) = (At^2 + Bt + C)\sin \pi x$$

$$u_{p_t} = (2At + B)\sin \pi x$$

$$u_{p_{xx}} = -\pi^2 (At^2 + Bt + C)\sin \pi x$$

Уврштавањем у једначину добијамо

$$(2At + B)\sin \pi x = -\pi^2(At^2 + Bt + C)\sin \pi x + t\sin \pi x$$

односно

$$2At + B = (-\pi^2 A)t^2 + (-\pi^2 B + 1)t - C\pi^2$$

па је

$$-\pi^2 A = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$-\pi^2 B + 1 = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{\pi^2}$$

$$-C\pi^2 = \frac{1}{\pi^2} \Rightarrow C = -\frac{1}{\pi^4}$$

Дакле, $u_p(x,t) = \left(\frac{1}{\pi^2}t - \frac{1}{\pi^4}\right)\sin \pi x$

Како је $u = u_h + u_p$, то $u_h = u - u_p$, па добијамо

$u_{h_t} = u_{h_{xx}}$

$u_h(x,0) = u(x,0) - u_p(x,0) = x(1-x) - \frac{1}{\pi^4}\sin \pi x \quad , \quad 0 \le x \le 1$

$u_h(0,t) = 0, \; u_h(1,t) = 0 \qquad t \ge 0$

Претпоставимо да је $u_h(x,t) = X(x)T(t)$. Тада је

$(**)\; X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$

$X(x)T(0) = x(1-x) - \frac{1}{\pi^4}\sin \pi x \quad , \quad 0 \le x \le 1$

$X(0) = 0, \; X(1) = 0$

Из $(**)$ добијамо

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda, \text{ односно } X''(x) + \lambda X(x) = 0, \; T'(t) + \lambda T(t) = 0$$

$1^\circ \; \lambda < 0$

Карактеристични полином је

$k^2 + \lambda = 0$

$k^2 = -\lambda$

$k = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$\left.\begin{aligned} &X(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \\ &X(1) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}\right) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow u_h(x,t) = 0$$

$2^\circ \; \lambda = 0$

Једначина постаје $X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = ax + b$

$$\left.\begin{aligned} &X(0) = b = 0 \\ &X(1) = a = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow u_h(x,t) = 0$$

$3^\circ \; \lambda > 0$

Карактеристични полином је

$k^2 + \lambda = 0$

$k^2 = -\lambda$

$k = \pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$

$X(0) = c_1 = 0$

$X(1) = c_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0$

За $c_2 = 0$ добијамо $X(x) = 0$, односно $u_h(x,t) = 0$. Како нас занимају нетривијална рјешења, узимамо $c_2 \neq 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda_n} = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$

$\lambda_n = n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}$

Дакле, $X_n(x) = c_{2n} \sin n\pi x$. Тражимо одговарајуће $T_n(t)$.

$T_n'(t) + \lambda_n T_n(t) = 0$

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = -\lambda_n$$

$$\ln|T_n(t)| = -\lambda_n t + d_n$$

$$T_n(t) = d_n e^{-\lambda_n t} = d_n e^{-n^2\pi^2 t}$$

Дакле, решење задатка $u_h(x,t)$ је облика

$$u_h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} d_n \sin n\pi x \, e^{-n^2\pi^2 t}$$

Означимо $c_{2n} d_n = e_n$, па је

$$u_h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \sin n\pi x \, e^{-n^2\pi^2 t}$$

Коефицијенте e_n добијамо из услова

$$u_h(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \sin n\pi x = x(1-x) - \frac{1}{\pi}\sin\pi x$$

Дакле, функцију $x(1-x) - \frac{1}{\pi}\sin\pi x$ (односно ф-је $x(1-x)$ и $\sin\pi x$) морамо развити у Фуријеов ред на $[0,1]$ по "синусима". Како $\sin\pi x \in \{\sin n\pi x \mid n \in \mathbb{N}\}$, треба само развити ф-ју $\varphi(x) = x(1-x)$. Њено непарно проширење на $[-1,1]$ је задато са

$$\phi(x) = \begin{cases} x(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ x(1+x), & -1 \le x < 0 \end{cases}$$

Како је ф-ја $\phi(x)$ непарна $\Rightarrow a_0 = a_n = 0,\ n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \phi(x) \sin n\pi x \, dx = 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x \, dx = \begin{bmatrix} t = \pi x \\ x = \frac{t}{\pi} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ t & 0 & \pi \end{array} \\ dx = \frac{dt}{\pi} \end{bmatrix} =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \frac{t}{\pi}\left(1-\frac{t}{\pi}\right)\sin t \frac{dt}{\pi} = \frac{2}{\pi^3}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\sin t dt \overset{\text{претходни зад.}}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\frac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right)\right) = \frac{2}{n^3\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

Дакле,

$$u_h(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\sin n\pi x - \frac{1}{\pi}\sin \pi x$$

па је

$$e_n = \frac{2}{n^3\pi^2}\left((-1)^n - 1\right), \ n > 1$$

$$e_1 = \frac{2}{n^3\pi^2}\left((-1)^1 - 1\right) - \frac{1}{\pi} = \frac{-4}{n^3\pi^2} - \frac{1}{\pi}.$$

Добијамо

$$u_h(x,t) = \left(\frac{-4}{n^3\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right)\sin \pi x \, e^{\pi^2 t} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^3\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\sin n\pi x \, e^{-n^2\pi^2 t^2}$$

и

$$u(x,t) = u_h(x,t) + \left(\frac{1}{\pi^2}t - \frac{1}{\pi^4}\right)\sin \pi x 0$$

2. Ријешити једначину

$$u_t = a^2 u_{xx} \text{ , на } \Omega = \{(x,t) \mid 0<x<l \text{ , } t>0\} \text{ уз услове}$$

$$u(0,t)=0 \text{ , } u(l,t)=0 \text{ , } t>0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x & , 0<x<\frac{l}{2} \\ l-x & , \frac{l}{2} \le x < l \end{cases}$$

Рјешење:

Претпоставимо да је $u(x,t) = X(x)T(t)$. Наш задатак постаје:

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

$$X(0) = X(l) = 0$$

$$X(x)T(0) = \begin{cases} x & , 0<x<\frac{l}{2} \\ l-x & , \frac{l}{2} \le x < l \end{cases}$$

Даље је

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

1° $\lambda < 0$

$$\frac{a^2 X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$a^2 X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

Карактеристични полином је

$$a^2 k^2 + \lambda = 0$$

па је

$$k^2 = \frac{-\lambda}{a^2}$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{-\lambda}{a^2}} = \pm\sqrt{\frac{-\lambda}{a^2}} = \pm\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}$$

Дакле, рјешење ове диференцијалне једначине је облика

$$X(x) = c_1 e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x}$$

Сада ћемо искористити граничне услове да нађемо c_1 и c_2

$$X(0)=c_1+c_2=0 \Rightarrow c_2=-c_1$$

$$X(l)=c_1 e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}l}+c_2 e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}l}=c_1\left(e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}l}-e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}l}\right)=0 \Rightarrow c_1=0$$

Дакле $X(x)=0$, па је $u(x,t)=0$ X

2° $\lambda=0$

$$\frac{a^2X''(x)}{X(x)}=0$$

$$X''(x)=0$$

$$X(x)=ax+b$$

Користећи граничне услове добијамо

$$X(0)=b=0$$

$$X(l)=al=0 \Rightarrow a=0$$

Дакле $X(x)=0$, па је $u(x,t)=0$ X

3° $\lambda>0$

$$\frac{a^2X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

$$a^2X''(x)+\lambda X(x)=0$$

Карактеристични полином је

$$a^2k^2+\lambda=0$$

$$k^2=-\frac{\lambda}{a^2}$$

$$k=\pm i\sqrt{\frac{\lambda}{a^2}}=\pm i\frac{\sqrt{\lambda}}{a}$$

Дакле, опште рјешење једначине је задато са

$$X(x)=c_1\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{a}+c_2\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{a}$$

Користећи граничне услове добијамо

$X(0) = c_1 = 0$

$X(l) = c_2 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{a} l = 0$

Ако је $c_2 = 0$, добили би $X(x) = 0$, па је $u(x,t) = 0$, а ово решење не задовољава услов

$$u(x,0) = \begin{cases} x & , 0 < x < \frac{l}{2} \\ l - x & , \frac{l}{2} \le x < l \end{cases}$$

Дакле, $c_2 \neq 0$, па је $\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{a} l = 0$. Одавде је

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a} l = n\pi$$

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{an\pi}{l}$$

$$\lambda_n = \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}$$

Дакле, $X_n(x) = c_{2n} \sin \frac{n\pi x}{l}$ за $\lambda_n = \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}$

Даље, тражимо $T_n(t)$ која задовољава услов

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = -\lambda_n = \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}$$

$$\int \frac{T_n'(t)}{T_n(t)} dt = \lambda \int dt$$

$$\ln |T_n(t)| = -\lambda_n t + d_n$$

$$T_n(t) = d_n e^{-\lambda_n t} = d_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t}$$

Дакле, решење нашег задатка има облик

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} d_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t}$$

Означимо $c_{2n} d_n$ са e_n, па је

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\frac{a^2 n^2\pi^2}{l^2}t}$$

Како је

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{l}=\begin{cases} x & , 0< x<\frac{l}{2} \\ l-x & , \frac{l}{2}\le x<l \end{cases}$$

коефицијенте c_n добијамо из Фуријеовог развоја ове ф-је. (сами)

3. Ријешити Кошијев проблем

$$u_t = u_{xx}$$
$$u_x(0,t)=4, \quad u_x(\pi,t)=4, \quad t>0$$
$$u(x,0)=3x, \quad 0<x<\pi$$

на скупу $\Omega=\{(x,t) \mid 0<x<\pi, \ t>0\}$.

Рјешење:

$$\mu(t)=4, \quad \nu(t)=4$$

Уводимо смјену

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$
$$w(x,t)=(\gamma_1 x^2+\gamma_2 x+\gamma_3)\mu(t)+(\delta_1 x^2+\delta_2 x+\delta_3)\nu(t)$$

гдје $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ бирамо тако да

$$v_x(0,t)=u_x(0,t)-w_x(0,t)=0$$
$$v_x(\pi,t)=u_x(\pi,t)-w_x(\pi,t)=0$$

Одакле имамо

$$4-(2\gamma_1\cdot 0+\gamma_2)\cdot 4-(2\delta_1\cdot 0+\delta_2)\cdot 4=0 \Rightarrow 4-4\gamma_2-4\delta_2=0$$
$$4-(2\gamma_1\pi+\gamma_2)\cdot 4-(2\delta_1\pi+\delta_2)\cdot 4=0 \Rightarrow 4-8\gamma_1\pi-4\gamma_2-8\delta_1\pi-4\delta_2=0.$$

Изаберимо $\gamma_1=\delta_1=\delta_2=\gamma_3=\delta_3=0$, $\gamma_2=1$. Добијамо

$$w(x,t)=4x$$

Наша ј-на се своди на

$$v_t+w_t=v_{xx}+w_{xx}$$
$$v_t=v_{xx}$$
$$v_x(0,t)=0, \quad v_x(\pi,t)=0, \quad t>0$$
$$v(x,0)=u(x,0)-w(x,0)=3x-4x=-x$$

Даље, претпоставимо да је $v(x,t)=X(x)T(t)$. Добијамо

$$X(x)T'(t)=T(t)X''(x)$$
$$X'(0)=0, \quad X'(\pi)=0$$
$$X(x)T(0)=-x$$

Одавде је

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \text{, односно} \quad T'(t)+\lambda T(t)=0,\ X''(x)+\lambda X(x)=0$$

1° $\lambda<0$

Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda=0$$
$$k^2=-\lambda$$
$$k=\pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow X(x)=c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$
$$X'(x)=\sqrt{-\lambda}c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x}-\sqrt{-\lambda}c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$
$$\left.\begin{array}{l} X'(0)=\sqrt{-\lambda}c_1-\sqrt{-\lambda}c_2=0 \Rightarrow c_2=c_1 \\ X'(\pi)=\sqrt{-\lambda}c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi}-\sqrt{-\lambda}c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}=\sqrt{-\lambda}c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi}-e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right)=0 \Rightarrow c_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X(x)=0 \Rightarrow \upsilon(x,t)=0$$

2° $\lambda=0$

Једначина постаје $X''(x)=0 \Rightarrow X(x)=ax+b$

$$X'(x)=a$$

$$\left.\begin{array}{l} X'(0)=a=0 \\ X'(\pi)=a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow X(x)=b$$

Даље, $T'(t)=0 \Rightarrow T(t)=c$

$\upsilon(x,t)=b\cdot c=B-const$

3° $\lambda>0$

Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda=0$$
$$k^2=-\lambda$$
$$k=\pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$X'(x)=-\sqrt{\lambda}c_1\sin\sqrt{\lambda}x+\sqrt{\lambda}c_2\cos\sqrt{\lambda}x$$
$$X'(0)=0=\sqrt{\lambda}c_2 \Rightarrow c_2=0$$
$$X'(\pi)=-\sqrt{\lambda}c_1\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$$

За $c_1=0$, добијамо $X(x)=0$, па је $\Theta(x,t)=0$. Нас занимају нетривијална рјешења, па је $c_1 \neq 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\,\pi=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda_n}\,\pi = n\pi, \; n\in\mathbb{N}$$

$$\lambda_n = n^2, \; n\in\mathbb{N}$$

Дакле, $X_n(x)=c_{1n}\cos nx$. Нађимо одговарајуће $T_n(t)$.

$$T_n'(t)+\lambda_n T_n(t)=0$$

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)}=-\lambda_n$$

$$T_n(t)=d_n e^{-\lambda_n t}$$

$$T_n(t)=d_n e^{-n^2 t}$$

Дакле, опште рјешење $\Theta(x,t)$ је облика

$$\Theta(x,t)=B+\sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}d_n \cos nx \, e^{-n^2 t}$$

Узимајући $c_{1n}d_n=e_n$ добијамо

$$\Theta(x,t)=B+\sum_{n=1}^{\infty} e_n \cos nx \, e^{-n^2 t}$$

Коефицијенте B и e_n добијамо из услова

$$\Theta(x,0)=B+\sum_{n=1}^{\infty} e_n \cos nx = -x$$

Дакле, ф-ју $\varphi(x)=-x$ морамо развити у Фуријеов ред на $[0,\pi]$ по "косинусима". Прво је морамо парно проширити на $[-\pi,\pi]$.

$$\Phi(x)=\begin{cases} -x, & 0\leq x\leq \pi \\ x, & -\pi\leq x<0 \end{cases}$$

Φ - парна $\Rightarrow b_n=0, \; n\in\mathbb{N}$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}-x\,dx=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=-\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -x\cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \left[\begin{matrix} u = x & d\vartheta = \cos nx\,dx \\ du = dx & \vartheta = \frac{\sin nx}{n} \end{matrix}\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right) = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

Дакле

$$\vartheta(x,0) = B + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \cos nx = -\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n^2\pi}\right)\left((-1)^n - 1\right)\cos nx$$

па је $B = -\pi$, $e_n = \frac{-2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)$.

Добијамо

$$\vartheta(x,t) = -\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n^2\pi}\right)\left((-1)^n - 1\right)\cos nx\, e^{-n^2 t}$$

па је

$$u(x,t) = -\pi - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx\, e^{-n^2 t} + 4x$$